

随机中点位移算法的改进

曹晓光

(北京航空航天大学图象处理中心, 北京 100083)

摘要 在研究用于分形图象生成的随机中点位移算法原理和实验结果的基础上, 提出了改进的随机中点位移算法, 以便生成具有预定基本形状和轮廓的分形图象, 并通过编程实验验证了改进算法的有效性。

关键词 分形, 随机中点位移

1 引言

70年代后期, Mandelbrot 提出了分形 (Fractals) 的概念和分形几何 (Fractal Geometry) 理论^[1,2]。80年代中期以后, 人们采用分形理论和技术生成了真实感很强的景物图象, 并有大量的论文发表^[3~7]。

随机中点位移算法 (Random Midpoint Displacement, 以下简称 MPD 算法) 适用于生成山地高程图和云图等具有复杂形状的自然景物图象。由于该算法易于实现, 且运行速度快, 所以是一种常用的随机分形算法。

但是, 在运行 MPD 算法生成分形图象之前, 几乎无法预测生成结果的大致形状和轮廓, 只有通过大量试验, 才能从中找出一些基本形状和轮廓符合要求的分形图象, 有时甚至找不到这样的图象。本文在深入研究 MPD 算法原理和实验结果的基础上, 提出了一种改进的 MPD 算法, 以便于生成具有预定基本形状和轮廓的分形图象, 并通过程序进行了验证。

2 MPD 算法的流程和实验结果

MPD 算法直接根据上述随机布朗运动的定义生成随机布朗运动。以一维情况为例, 在给定区间和初值的条件下, 对两点的中点进行线性插值, 再加上

一个随机位移量, 作为该中点的值。

在生成模拟山地高程图和云图等自然景物的分形图象时, 实际使用的是二维的 MPD 算法。设总迭代次数为 M , 则分形图象大小为 $(N+1)^2$, 其中 $N=2^M$ 。又设分形图象的分维数为 D , D 的取值范围为 $2.0 < D < 3.0$ 。函数 Gauss() 和函数 InitGauss() 分别是均值为 0、方差为 1 的高斯随机数的发生器及其初始化函数, 设该发生器的初始化值为整数 S , 则 MPD 算法的主要流程如下 (详细的公式推导参见文献 [7] 和 [8])。

(1) 用 S 值初始化高斯随机数发生器:

InitGauss(S)

(2) 令初始迭代次数 $m=0$, $\delta_0=\sigma$, 然后对图象四个角上的象元 (图 1(a) 中的 ■ 点) 分别赋予随机位移量值: $\delta_0 \cdot \text{Gauss}()$

(3) 令当前迭代次数 m 递增 1, $\delta_{m+1} = \delta_m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-D}{2}}$, 求当前迭代所需计算的所有象元的值 (即进行中值位移运算)。如图 1(a)、图 1(b) 所示, 先计算图中标出的内部象元 (□ 点), 即用已有值的四邻域象元 (■ 点) 的均值加上 $\delta_{m+1} \cdot \text{Gauss}()$ 随机位移量; 再计算图中的边界象元 (◆ 点), 即用已有值的三近邻象元的均值加上 $\delta_{m+1} \cdot \text{Gauss}()$; 最后计算剩余的所有象元 (未标明的交叉点), 即用已有值的四近邻象元的均值加上 $\delta_{m+1} \cdot \text{Gauss}()$ 。

(4) 重复步骤 (3), 直到 $m > M$ 时结束。

从上述步骤可以总结出 MPD 算法的以下特点。

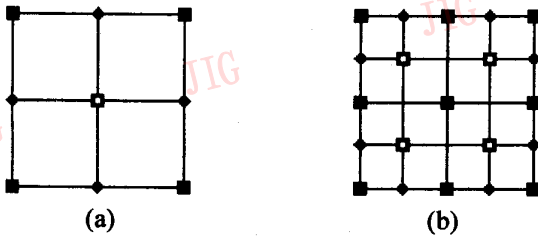


图 1 MPD 算法迭代示例

(a)第一次迭代($m=1$) (b)第二次迭代($m=2$)

Fig. 1 Iteration examples of Mid-Point

Displacement algorithm

(a)The first iteration (b)The second iteration

从上述步骤可以总结出 MPD 算法的以下几个特点:

(1)MPD 算法的结果图象的大小或分辨率随迭代次数的增大而增大,且图象的细节也逐步增多(表 1)。

表 1 迭代次数与图象大小对照表

Table 1 Relationship between iteration times and image size

迭代运算次数	生成图象大小	迭代运算次数	生成图象大小
1	3×3	6	65×65
2	5×5	7	129×129
3	9×9	8	257×257
4	17×17	9	513×513
5	33×33	10	1025×1025

(2)迭代时新生成象元的值用已经有值的象元来计算,具体计算公式是:

$$\text{新象元值} = \text{邻域象元均值} + \text{随机位移量}$$

因此,每次迭代的结果图象取决于上一次迭代的结果图象和随机位移量。假设随机位移量恒为零,则迭代过程相当于用均值来放大图象,这种放大不会增加图象的细节。

(3) δ_{m+1} 在每次迭代中具有恒定的值,且该值随迭代次数 m 的增加而减小。推导如下:

由于 $\delta_{m+1} = \delta_m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-D}{2}}$, 且 $2.0 < D < 3.0$, 所以 $0.0 < \frac{3-D}{2} < 0.5, 0.7 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-D}{2}} < 1.0$, 即 $\delta_{m+1} = \delta_m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-D}{2}}$ 是递减的。

(4)真正对增加细节起作用的是随机位移量,其计算公式如下:

$$\text{随机位移量} = \delta_{m+1} \cdot \text{Gauss}()$$

注意到 δ_{m+1} 在每次迭代中具有恒定的值,因此,每次迭代时的随机位移量序列相当于高斯随机数序列乘以振幅 δ_{m+1} ,换句话说,决定生成图象局部如何随机变化的是高斯随机数序列,而决定该变化大小的是 δ_{m+1} 值。

(5)初始化值 S 主要用来决定生成图象的细节变化(包括形状和轮廓),分维数 D 主要用来决定生成图象的细节变化的幅度。由于高斯随机数序列取决于运行 MPD 算法时输入的参数——随机数发生器的初始化值 S ,因此 δ_{m+1} 值取决于运行 MPD 算法时的另一个输入参数——分形图象的分维数 D ,所以可以从特点(4)得到本推论。

图 2(a)~图 2(i)是用 3 个不同的 S 值和 3 个不同的 D 值进行组合,而后分别运行 MPD 算法后得到的分形图象。从这些图象中可以看出,当 S 值不变时,图象的基本形状和轮廓是相似的,此时随着 D 值的增大,局部细节变化幅度增大,图象的平滑程度降低。

3 改进原因和改进措施

从以上讨论可知,用 MPD 算法生成的分形图象的基本形状和轮廓主要取决于随机数发生器的初始化值 S 。如果要想生成特定形状的分形图象(例如生成与某个已知山脉相近似的高程图),则势必要对 S 值的取值进行穷举试验,从中找出一个满意的结果图象,这样做显然费时费力,更为严重的问题是:有可能找不到一个令人满意的结果图象,因为 MPD 算法生成的是完全的随机分形图象,未必能与真实图象相同或相似。

同样从以上讨论可知,每次迭代的结果图象是由上一次迭代的结果图象和随机位移量共同决定的,这一点给我们以启示:可以通过给出初始迭代图象 I_0 和指初始迭代次数 m_0 的方法来控制生成图象的基本形状和轮廓。鉴于 δ_{m+1} 值随迭代次数 m 的增加而减小(即随机位移量的幅度会越来越小)这样一个事实,初始迭代图象 I_0 将会对生成的结果图象有较大影响。极端地,当初始迭代次数 $m_0 = M$ (M 为总迭代次数)时,结果图象与初始图象完全相同。

改进后的 MPD 算法的主要流程如下:

- (1)用任意 S 值初始化高斯随机数发生器;
- (2)令初始迭代次数 $m = m_0$, 计算 δ_m , 然后用初始迭代图象 I_0 进行迭代;

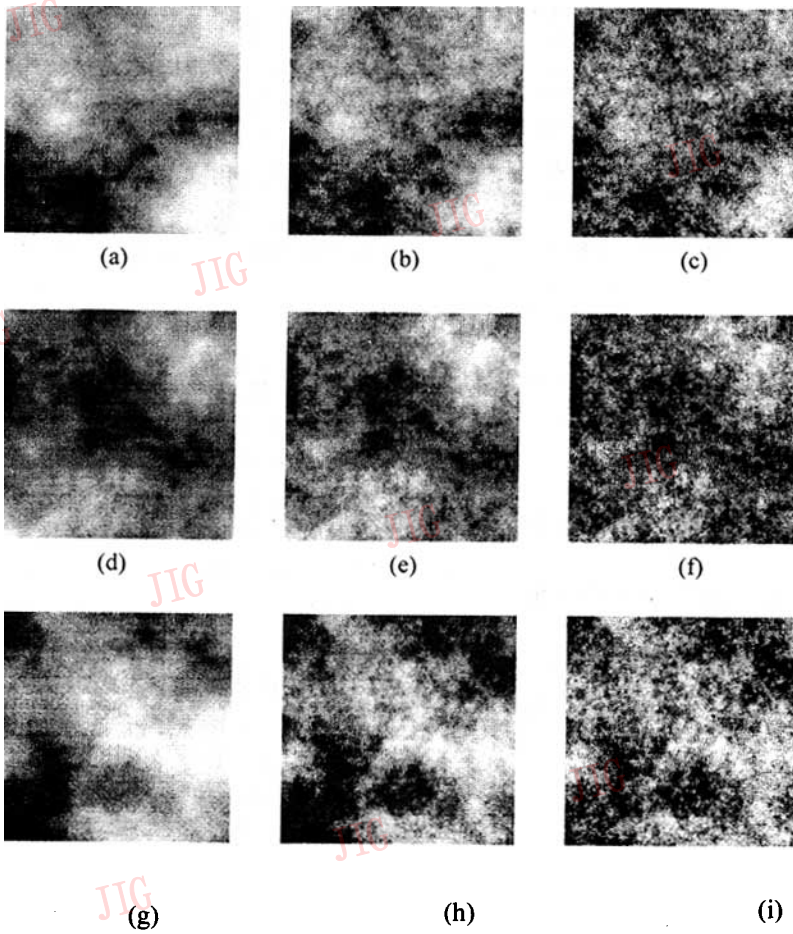


图 2 不同初值时 MPD 算法的结果

Fig. 2 Results of MPD algorithm with various initial parameters

- (a) $S=12, D=2.2$ (b) $S=12, D=2.5$ (c) $S=12, D=2.8$
- (d) $S=987, D=2.2$ (e) $S=987, D=2.5$ (f) $S=987, D=2.8$
- (g) $S=12346, D=2.2$ (h) $S=12346, D=2.5$ (i) $S=12346, D=2.8$

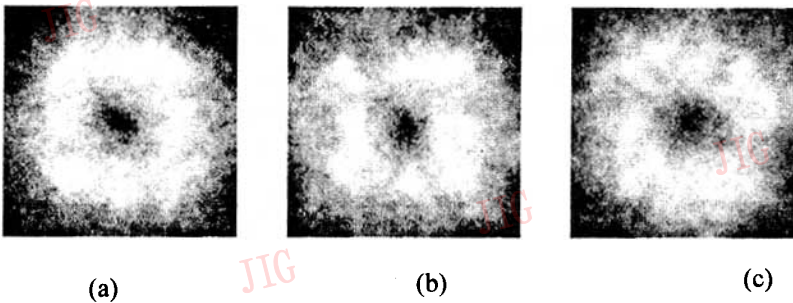


图 3 改进后 MPD 算法的结果

Fig. 3 Results of the improved MPD algorithm

- (a) $S=12$ (b) $S=987$ (c) $S=12346$

(3) 令当前迭代次数 m 递增 1, $\delta_{m+1} = \delta_m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-D}{2}}$, 求当前迭代所需计算的所有象元的值(计算方法同 MPD 算法)。

(4) 重复步骤(3), 直到 $m > M$ 时结束。

以下用实验验证改进后的 MPD 算法的有效性。假定要生成一幅黑洞天体的平面图象, 图象中央是黑洞中心, 周围是类似于环形的较亮的星云, 外层是较黑的宇宙。为了生成这一假想图象, 取初始迭代次数和初始迭代图象如下: $D=2.8$ 且 $m_0=2$

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 100 & 50 & 1 \\ 50 & 255 & 255 & 255 & 50 \\ 100 & 255 & 1 & 255 & 100 \\ 50 & 255 & 255 & 255 & 50 \\ 1 & 50 & 100 & 50 & 1 \end{bmatrix}$$

注意, 为了模拟星云内部亮度突变, 应取分维数 $D=2.8$, 再用三个不同的初始化值 S 分别运行改进后的 MPD 算法, 得到结果图象如图 3 所示。从图中可以看出, 三幅图象均满足预定要求(指基本形状和轮廓), 而在局部细节上均具有随机分形图象的局部特征。

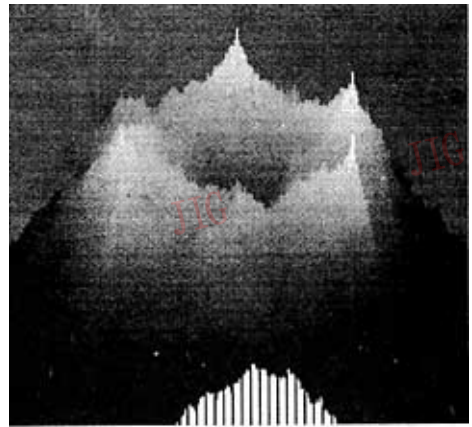
上述结果也可以被理解为一个火山口的高程图象。为了生成一个比较好的火山口的假想图象, 需要对上述初始数据作如下调整: $D=2.3$ 且 $m_0=2$

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 100 & 50 & 1 \\ 50 & 200 & 200 & 200 & 50 \\ 100 & 200 & 50 & 200 & 100 \\ 50 & 200 & 200 & 200 & 50 \\ 1 & 50 & 100 & 50 & 1 \end{bmatrix}$$

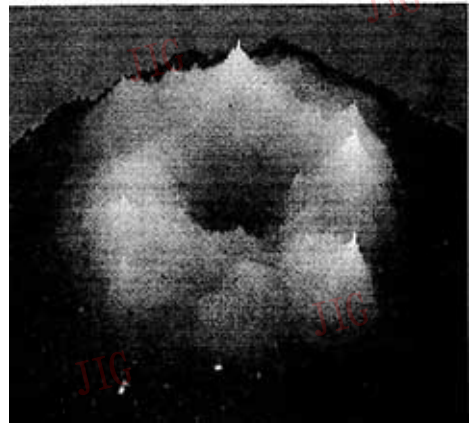
用调整后的初始数据生成火山口的高程图, 其 30° 和 60° 视角的立体图象如图 4(a) 和图 4(b) 所示。为了便于观察生成后图象的原貌, 在图 4(a) 所示。为了便于观察生成后图象的原貌, 在图 4(a) 和图 4(b) 中直接用亮度表示高程, 而未作上色及其它处理。同时, 图象的背景用单一的灰色表示, 图象的断面用垂直的直线表示。

由于 MPD 算法运行速度快, 对于以上形状和轮廓较为简单的分形图象, 其初始迭代次数 m_0 和初始迭代图象 I_0 可凭经验及做几次试验来选定, 通常取 $m_0=1$ 或 2。如果形状和轮廓比较复杂, 或要求精确生成某个高程分形图象, 应取 $m_0 \geq 3$, 并考虑结合地图和地面控制点直接建立初始迭代图象或用曲面拟合的方法得到初始迭代图象。

最后, 需要补充说明一点: 采用常规的 MPD 算



(a)



(b)

图 4 三维视图

Fig. 4 3Dview

(a) 30° 视角

(b) 60° 视角

法无法生成图 3 和图 4 所示的宏观形状预定的图象。

4 结 论

(1) 常规的 MPD 算法可用来生成随机分形图象。

(2) 生成时给定的分维数 D 主要用来控制图象的平滑程度; 高斯随机数发生器的初始化值 S 主要用来控制生成图象的基本形状和轮廓。

(3) 原理分析和推导可以证明, 通过给定初始迭代次数 m_0 和初始迭代图象 I_0 , 可以不同程度地(视初始迭代次数 m_0 和总迭代次数 M 的值而定)控制图象的基本形状和轮廓, 由此得到改进的 MPD 算

法。

(4)实验证明(包括文中列出和未列出的实验),改进的MPD算法可以有效地控制生成图象的基本形状和轮廓。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B. Fractals, Form, Chance, and Dimension. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1977.
- 2 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company, New York, 1982.
- 3 Smith A R. Plants, Fractals, and Formal languages. Computer Graphics, 1984, 18(3).
- 4 Bloomenthal J. Modeling the Might Maple. Computer Graphics, 1985, 19(3).
- 5 Gardner G Y. Visual Simulation of Clouds. Computer Graphics, 1985, 19(3).
- 6 Miller G S. The Definition and Rendering of Terrain Maps. Computer Graphics, 1986, 20(4).
- 7 Barnsley M F., et al. The Science of Fractal Images. Springer-Verlag, New York, 1988.
- 8 周孝宽等著. 分形图象学. 北京:北京教育出版社, 1995.



曹晓光,北京航空航天大学图象处理中心副研究员。主要研究方向为数字照片处理,医学图象处理,图象生成,图象压缩以及 Windows/C++ 环境图象处理系统设计。发表论文、论著 10 篇。

An Improved Random Midpoint Displacement Algorithm

Cao Xiaoguang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract Based on the study of the principles and experiment results of the random midpoint displacement algorithm(MPD)for fractal image generation,an improved version of MPD is proposed, which can be used for creating fractal images with predeterminate shape and outline. The efficiency of the present-ed algorithm has been proved by computer implementation.

Keywords Fractal, Random midpoint displacement